SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1999-2000

Maria Carla Tesi

OMOGENEIZZAZIONE PER EQUAZIONI ELLITTICHE DEGENERI FORTEMENTE ANISOTROPE

30 maggio 2000

Tecnoprint - Bologna 2000

Riassunto Si presentano risultati relativi ad un problema di omogeneizzazione per una equazione ellittica degenere descrivente un mezzo fortemente anisotropo. Più precisamente si studia il limite per $\epsilon \to 0$ dei seguenti problemi di Dirichlet (associati ad equazioni con coefficienti periodici rapidamente oscillanti):

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha(\frac{x}{\epsilon}, \nabla u)A(\frac{x}{\epsilon})\nabla u) = f(x) \in L^\infty(\Omega) \\ u = 0 \text{ su } \partial\Omega \end{cases}$$

dove $\alpha : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\alpha(y, \xi) \approx \langle A(y)\xi, \xi\rangle^{p/2-1}$, $A \in M^{n\times n}(\mathbb{R})$, A misurabile, periodica di periodo Y e tale che $A^t(x) = A(x) \geq 0$ quasi ovunque.

L'anisotropia del mezzo è descritta dalla seguente ipotesi di struttura sulla matrice A:

$$\lambda^{2/p}(x)|\xi|^2 \leq \langle A(x)\xi, \xi\rangle \leq \Lambda^{2/p}(x)|\xi|^2,$$

dove i pesi λ e Λ soddisfano oppurtune ipotesi di sommabilità, e inoltre possono annullarsi, divergere ed essere "sufficientemente" diversi tra di loro. La convergenza al problema omogeneizzato è stata ottenuta tramite il classico metodo di compattezza per compensazione, che è stato esteso a spazi di Sobolev con peso.

Abstract We present results concerning a problem of homogenization for an elliptic degenerate differential equation describing a medium strongly anisotropic. More precisely we study the limit for $\epsilon \to 0$ of the following Dirichlet problems (associate to equations with rapidly oscillating periodic coefficients):

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha(\frac{x}{\epsilon}, \nabla u)A(\frac{x}{\epsilon})\nabla u) = f(x) \in L^\infty(\Omega) \\ u = 0 \text{ su } \partial\Omega \end{cases}$$

where $\alpha : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\alpha(y, \xi) \approx \langle A(y)\xi, \xi\rangle^{p/2-1}$, $A \in M^{n\times n}(\mathbb{R})$, A measurable, Y-periodic and such that $A^t(x) = A(x) \geq 0$ almost everywhere.

The anisotropy of the medium is described by the following stucture hypothesis on the matrix A:

$$\lambda^{2/p}(x)|\xi|^2 \leq \langle A(x)\xi, \xi\rangle \leq \Lambda^{2/p}(x)|\xi|^2,$$

where the weights λ and Λ satisfy suitable summability hypothesis, and moreover they can become zero, they can blow up and they can be "sufficiently" different. The convergence to the homogenized problem has been obtained by the classical methos of the compensated compactness, which has been extended to weighted Sobolev spaces.

1 Introduzione

I risultati presentati in questo seminario sono stati ottenuti in collaborazione con Bruno Franchi [12].

I materiali compositi tipo il cemento, i materiali con molti piccoli buchi o fenditure, i materiali fibrati o stratificati eccetera giocano un ruolo importante in ingegneria e nelle scienze applicate. Tipicamente in tali materiali i parametri fisici (tipo la conducibilità, il coefficiente di elasticità eccetera) sono discontinui e oscillano tra valori differenti che caratterizzano ciascuno le diverse componenti.

Quando tali componenti sono finemente mischiate, questi parametri oscillano molto rapidamente e la struttura microscopica del materiale diventa piuttosto complicata.

D'altra parte il materiale, da un punto di vista macroscopico, diventa piuttosto semplice poichè tende a comportarsi come un materiale omogeneo ideale, che viene chiamato *il materiale omogeneizzato*. Lo scopo della teoria dell'omogeneizzazione è di descrivere matematicamente questi processi limite quando ϵ, il parametro che descrive la finezza della struttura microscopica, tende a zero.

Quello di cui ci occuperemo in questo seminario è la teoria della omogeneizzazione per una equazione ellittica degenere fortemente anisotropa. Il significato di tale terminologia verrà precisato fra breve.

Iniziamo col descrivere un risultato classico di omegeneizzazione per un problema di conduzione termica in un mezzo con anisotropie uniformemente distribuite. Consideriamo un materiale la cui struttura sia ϵ-periodica in tutte le direzioni, con ϵ parametro piccolo. Per descrivere i coefficienti di conducibilità si introduce una cella unitaria Y in $\mathbb{R}^n$, per semplicità consideriamo $Y = (0,1)^n$, ed una matrice $A : \mathbb{R}^n \to M^{n\times n}(\mathbb{R}), A = (a_{i,j})$ che soddisfa tipicamente le seguenti proprietà:

- per ogni $i, j = 1, n$ le funzioni $a_{i,j} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ sono periodiche di periodo Y
- $\exists\lambda > 0; \langle A(x)\xi, \xi\rangle \geq \lambda|\xi|^2$, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$, per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$.

In questo caso gli elementi della matrice $\{a_{i,j}(\frac{\cdot}{\epsilon}), i,j = 1,n\}$ sono delle funzioni periodiche di periodo ϵY, che descrivono i coefficienti di conducibilità del materiale.
Supponiamo che il materiale occupi una regione Ω (sottoinsieme aperto e limitato di $\mathbb{R}^n$) il cui bordo $\partial\Omega$ sia mantenuto per esempio ad una fissata temperatura $u = 0$. Allora quando viene fornito del calore esterno f la temperatura u_ϵ soddisfa asintoticamente l'equazione del calore stazionaria

$$(P_\epsilon)\begin{cases} -\operatorname{div}(A(\frac{x}{\epsilon})\nabla u_\epsilon) = f \text{ su } \Omega \\ u_\epsilon = 0 \text{ su } \partial\Omega \end{cases}$$

(Notiamo che nel caso si consideri un potenziale elettrostatico l'equazione è la stessa). Grazie alla ipotesi di coercività sulla matrice A il problema (P_ϵ) è ben posto e per ogni $f \in L^2(\Omega)$ esiste un' unica soluzione $u_\epsilon \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

Il problema fisico reale corrisponde al caso $\epsilon = \epsilon_0$ fissato. Del resto, come è già stato sottolineato, quando ϵ è piccolo rispetto alla misura di Ω, $|\Omega|$, la struttura microscopica è piuttosto complicata e quindi u_ϵ è difficile da calcolare: i coefficienti di conducibilità $a_{i,j}(\frac{\cdot}{\epsilon})$ hanno delle discontinuità sulle interfacce che separano i componenti in ogni celletta di dimensione ϵ. Quindi, per tenere in considerazione le corrispondenti condizioni di trasmissione si è costretti a fare un certo numero di discretizzazioni in ciascuna celletta. Quando ϵ è piccolo rispetto a $|\Omega|$ questo numero di solito eccede le capacità dei normali computers, e quindi il problema diventa intrattabile dal punto di vista numerico. Quindi si è costretti a considerare ϵ come un parametro variabile e ci si aspetta che quando ϵ tende a zero le soluzioni u_ϵ convergano ad una qualche u, la quale u a sua volta fornirà una approssimazione di u_ϵ per ϵ piccolo.

Come si nota dalla figura, le disomogeneità finora considerate sono "isotrope", ovvero sono distribuite uniformemente in tutte le direzioni del mezzo. Un problema di un certo rilievo nelle applicazioni si ha in corrispondenza di disomogeneità "anisotrope". Per esempio si può pensare al caso del cemento armato, che è per l'appunto armato da strutture di ferro filiformi rettilinee, che quindi rappresentano delle in-

omogeneità fortemente anisotrope. Per tenere conto di questo fattore si considera una matrice non più uniformemmente ellittica, sulla quale si impongono delle condizioni di coercività "degenere". In particolare nel nostro lavoro abbiamo fatto le seguenti ipotesi di struttura sulla matrice A:

- A è misurabile, periodica di periodo Y e tale che $A^t(x) = A(x) \geq 0$ quasi ovunque in Y
- $\lambda^{2/p}(x)|\xi|^2 \leq \langle A(x)\xi, \xi\rangle \leq \Lambda^{2/p}(x)|\xi|^2,$

  per ogni $\xi \in I\!R^n$, per q.o. $x \in I\!R^n$, dove λ e Λ sono due pesi (funzioni non negative e localmente sommabili) periodici di periodo Y che soddisfano determinate ipotesi di sommabilità che saranno precisate in seguito.

Prima di discutere in dettaglio la situazione affrontata nel nostro lavoro, vorrei dare un' idea del tipo di problematiche si incontrano quando si cerca di ottenere l'equazione limite (equazione omogeneizzata). Mi riferisco per semplicità al problema (P_ϵ). Un primo approccio potrebbe consistere nel sostituire i coefficienti $a_{i,j}(\frac{\cdot}{\epsilon})$ in (P_ϵ) con il loro limite debole-$*$ $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$ quando $\epsilon \to 0$. Questo corrisponde a sostituire $a_{i,j}(\frac{\cdot}{\epsilon})$ con $a_{i,j}(Y) \equiv \frac{1}{|Y|}\int_Y a_{i,j}(x)dx$, cioè il valore medio di $a_{i,j}$ sulla cella. Però ciò non funziona: i coefficienti $a_{i,j}(\frac{\cdot}{\epsilon})$ sono solo limitati in $L^\infty(\Omega)$, e quindi ci si può solo aspettare che la successione $\{u_\epsilon\}$ sia limitata in $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Quindi le derivate di u_ϵ convergono solo debolmente in $L^2(\Omega)$ per cui dobbiamo fare il limite del prodotto di due successioni debolmente convergenti in $L^2(\Omega)$:

- $a_{i,j}(\frac{x}{\epsilon}) \rightharpoonup a_{i,j}(Y)$ debolmente in $L^2(\Omega)$, per $\epsilon \to 0$
- $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_j} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial x_j}$ debolmente in $L^2(\Omega)$, per $\epsilon \to 0$.

In generale questo limite non esiste, nemmeno nel senso delle distribuzioni, e quindi si deve ricorrere a degli artifici. Un possibile metodo che viene usato è il metodo della "compattezza per compensazione", il cui nome deriva dal fatto che per compensare la mancanza di compattezza si devono aggiungere delle opportune ipotesi addizionali sugli elementi che convergono debolmente.

Anche nel nostro lavoro abbiamo usato il metodo della compattezza per compensazione per ottenere la convergenza al problema omogeneizzato.

Veniamo ora alla descrizione più dettagliata del problema da noi affrontato. Il problema di Dirichlet da noi considerato ha la forma seguente:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(\frac{x}{\epsilon},\nabla u)) := -\operatorname{div}(\alpha(\frac{x}{\epsilon},\nabla u)A(\frac{x}{\epsilon})\nabla u) = f(x) \in L^\infty(\Omega) \\ u = 0 \text{ su } \partial\Omega \end{cases}$$

dove $a : I\!R^n \times I\!R^n \to I\!R^n$ soddisfa ipotesi di struttura che verranno precisate in seguito. Essenzialmente assumiamo che $a(y,\xi)$ sia una funzione di Carathéodory, periodica di periodo Y in ciascuna $y_i (i = 1,\dots,n)$, strettamente monotona in ξ e che verifichi $a(y,\xi) = \alpha(y,\xi)A(y)\xi$ con $\alpha(y,\xi) \approx \langle A(y)\xi,\xi\rangle^{p/2-1}$ e $\lambda^{2/p}(x)|\xi|^2 \leq \langle A(x)\xi,\xi\rangle \leq \Lambda^{2/p}(x)|\xi|^2$. Le ipotesi sui pesi λ e Λ sono enunciate e discusse nel prossimo paragrafo. Qui ci limitiamo a sottolineare che i due pesi non sono equivalenti.

Possiamo pensare per esempio all'operatore p-Laplaciano generalizzato della forma

$$-\operatorname{div}(|\sqrt{A}(\frac{x}{\epsilon})\nabla u|^{p-2}A(\frac{x}{\epsilon})\nabla u) = f, \tag{1}$$

dove A (come menzionato già in precedenza) ha un comportamento fortemente anisotropo, nel senso che il rapporto tra l'autovalore più grande e quello più piccolo non è limitato.

Quando $\lambda \equiv \lambda_0 > 0$ e $\Lambda \equiv \Lambda_0 < +\infty$, cioè quando l'operatore differenziale è uniformemente ellittico in Ω il problema è stato ampiamente studiato e risolto (si veda per esempio [1], [18], [14] e la recente monografia [2]).

Quando $\lambda \equiv \Lambda$ il problema è stato completamente risolto da De Arcangelis and Serra Cassano in [8] nel caso in cui λ sia nella classe A_p dei pesi di Muckenhoupt. Una definizione precisa di questa condizione viene data in seguito, però è importante notare che per verificare questa condizione si richiede una descrizione accurata del comportamento locale dei coefficienti ad ogni scala. Inoltre la condizione $\lambda \equiv \Lambda$

impone di considerare una anisotropia uniformemente distribuita nel mezzo.

La situazione studiata nel nostro lavoro tiene conto di forti anisotropie, nel senso che le funzioni peso λ e Λ possonno annullarsi o esplodere, e che possono differire sostanzialmente tra di loro, cioè il loro rapporto può annullarsi o divergere in certi punti.

Per formulare le nostre affermazioni in maniera compatta, introduciamo alcune notazioni che saranno usate nel seguito in tutto il lavoro. Se ω è una funzione peso ed E è un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^n$, scriveremo

$$\omega(E) := \int_E \omega(x)\, dx, \qquad \fint_E \omega(x)\, dx := \frac{1}{|E|} \int_E \omega(x)\, dx,$$

dove $|E|$ è la misura di Lebesgue di E.

Assumiamo che le seguenti condizioni siano soddisfatte. Le funzioni peso λ e Λ sono non "troppo cattive" nel seguente senso:

I) $\lambda \in A_p$ (la classe di Muckenhoupt), cioè λ è una funzione non negativa misurabile su $\mathbb{R}^n$ tale che

$$K := \sup_Q \left(\fint_Q \lambda dy\right) \cdot \left(\fint_Q \lambda^{-1/(p-1)} dy\right)^{p-1} < \infty, \tag{2}$$

dove il sup è fatto su tutti i cubi $Q = Q(x,r) = \{y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n; \max_j |x_j - y_j| < r\}$, dove $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, r \in (0, r_0], r_0 > 0$. Denotiamo x e r rispettivamente il centro e il raggio di $Q(x,r)$.

II) $\Lambda \in L^{1+\mu}(Y), \mu > 0$, ed è un peso doubling, cioè

$$D_\Lambda = \sup_Q \Lambda(2Q)/\Lambda(Q) < \infty,$$

dove il sup è fatto su tutti i cubi $Q = Q(x,r), x \in \mathbb{R}^n, r \in (0, r_0]$ and $2Q = Q(x, 2r)$.

È noto che la condizione (2) implica che anche λ è un peso doubling, con la costante di doubling che dipende solo da K (si veda [13]).

I due pesi sono non "troppo diversi" nel seguente senso:

III) esistono $q > p$ e $C > 0$ tali che, se I, J sono cubi di raggio $r(I), r(J)$ rispettivamente, tali che $I \subseteq J$ e $r(I), r(J) \leq r_0$, allora

$$\frac{r(I)}{r(J)}\left(\frac{\Lambda(I)}{\Lambda(J)}\right)^{1/q} \leq C\left(\frac{\lambda(I)}{\lambda(J)}\right)^{1/p}. \tag{3}$$

Esempio 1. Supponiamo $\lambda \equiv 1$ e Λ soddisfi (II). Allora (III) equivale a

$$\left(\frac{r(I)}{r(J)}\right)^{1-n/p}\left(\frac{\Lambda(I)}{\Lambda(J)}\right)^{1/q} \leq C, \tag{4}$$

che è soddisfatta per esempio se

$$1 - \frac{n}{p} + \frac{1}{q}\log_2 D_\Lambda > 0.$$

Esempio 2. Supponiamo $\lambda \equiv 1$ e $\Lambda(x) = |x|^{-\alpha}, 0 < \alpha < n$ su Y, prolungata per periodicità su tutto $\mathbb{R}^n$. L'ipotesi (II) è soddisfatta dato che Λ è un peso A_1. Un calcolo elementare mostra che

$$\frac{\Lambda(I)}{\Lambda(J)} \leq C\left(\frac{r(I)}{r(J)}\right)^{n-\alpha},$$

di modo che (4) è valido se esiste un $q > p$ tale che

$$1 - \frac{n}{p} + \frac{1}{q}(n-\alpha) \geq 0;$$

in particolare, un tale q esiste se

$$\alpha < \min\{p, n\}.$$

Esempio 3. Supponiamo $\lambda \equiv 1$ and $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m_x \times \mathbb{R}^{n-m}_y$, e sia $\Lambda(x,y) = |x|^{-\alpha}, 0 < \alpha < m$, prolungata per periodicità. Di nuovo vediamo che la condizione (III) è soddisfatta se $\alpha < \min\{p, m\}$ (la condizione (II) vale ancora dato che $\Lambda \in A_1$).

Esempio 4. Se $\Lambda \approx \lambda$, allora la conzione (III) segue dalla proprietà di doubling.

È possibile dimostrare, usando la periodicità e la proprietà di doubling, che le ipotesi locali I), II) e III) sono in realtà globali, cioè valgono per ogni $r > 0$. Vale infatti il seguente Lemma:

Lemma 1 *Se λ e Λ soddisfano le ipotesi I), II) e III) per $0 < r < r_0$, allora soddisfano le stesse ipotesi per ogni $r > 0$.*

Dim. Si veda [12].

Definiamo ora alcuni spazi di funzioni adeguati per il nostro problema. Se $s > 1$ e $\omega \in A_s$ indicheremo con $L^s(\Omega, \omega) = \{u \in L^1_{loc}(\Omega); \omega^{1/s}u \in L^s(\Omega)\}$, e con $W^{1,s}(\Omega, \omega) = \{u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega); \omega^{1/s}u \in L^s(\Omega), \omega^{1/s}\nabla u \in (L^s(\Omega))^n\}$. Inoltre, $\mathring{W}^{1,s}(\Omega, \omega)$ è la chiusura di $C_0^\infty(\Omega)$ in $W^{1,s}(\Omega, \omega)$.

Definizione 1 *Se $1 < p < \infty$, poniamo*

$$W^{1,p}_A(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega, \lambda) \cap W^{1,1}_{loc}(\Omega); \int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla u\rangle^{p/2} dx < +\infty\}, \quad (5)$$

munito della norma

$$\|u\|_{W^{1,p}_A(\Omega)} = \left(\int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla u\rangle^{p/2} dx\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |u|^p \lambda dx\right)^{1/p}. \quad (6)$$

Si può dimostrare (Teorema 1) che $W^{1,p}_A(\Omega)$ è immerso con continuità in $W^{1,1}(\Omega)$. Così possiamo definire

$$\mathring{W}^{1,p}_A(\Omega) := W^{1,p}_A(\Omega) \cap \mathring{W}^{1,1}(\Omega).$$

Osservazione 1 *Se $\lambda \approx \Lambda$ allora $\mathring{W}^{1,p}_A(\Omega)$ è la chiusura di $C_0^\infty(\Omega)$ in $W^{1,p}_A(\Omega)$ (si veda [8], Remark 3.6).*

Teorema 1 *Abbiamo:*

i) $W^{1,p}_A(\Omega)$ è uno spazio di Banach riflessivo;

ii) $W^{1,p}_A(\Omega)$ è immerso con continuità in $W^{1,p}(\Omega, \lambda)$ e quindi è immerso con continuità in $W^{1,1}(\Omega)$. Inoltre $\mathring{W}^{1,p}_A(\Omega)$ è immerso con continuità in $\mathring{W}^{1,p}(\Omega, \lambda)$;

iii) $[u]^p_{W^{1,p}_A(\Omega)} := \int_\Omega \langle A\nabla u, \nabla u\rangle^{p/2} dx$ è una norma su $\mathring{W}^{1,p}_A(\Omega)$. Più precisamente, $\|u\|_{L^p(\Omega,\lambda)} \leq C[u]^p_{W^{1,p}_A(\Omega)}$, dove la costante C è una costante geometrica che dipende solo da K, la costante A_p di λ in (2).

iv) $(W_A^{1,p}(\Omega))^* = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega), \quad u = g_0\lambda^{1/p} + div(\sqrt{A}g),$ *con* $(g_0, g) \in (L^{p'}(\Omega))^{n+1}, 1/p + 1/p' = 1\}$, *e l'azione di* u *su* $\varphi \in W_A^{1,p}(\Omega)$ *è data da*

$$\int_\Omega [g_0\varphi\lambda^{1/p} + \langle\sqrt{A}g, \nabla\varphi\rangle]\, dx.$$

v) $(\overset{\circ}{W}{}_A^{1,p}(\Omega))^* = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega), \quad u = div(\sqrt{A}g),$ *con* $g \in (L^{p'}(\Omega))^n, 1/p + 1/p' = 1\}$, *e l'azione di* u *su* $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_A^{1,p}(\Omega)$ *è data da*

$$\int_\Omega \langle\sqrt{A}g, \nabla\varphi\rangle dx.$$

Dim. Si veda [12].
Se $\epsilon > 0$ poniamo

$$A_\epsilon(x) = A(\frac{x}{\epsilon}), \lambda_\epsilon(x) = \lambda(\frac{x}{\epsilon}), \Lambda_\epsilon(x) = \Lambda(\frac{x}{\epsilon}). \tag{7}$$

Possiamo ora scrivere il risultato di convergenza che siamo interessati a dimostrare:

Teorema 2 (convergenza al problema omogeneizzato) *Sia* $a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *una funzione che soddisfa le seguenti proprietà di struttura:*

$$(S_1)\begin{cases} i) & a(y,\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ è continua } \forall y \in \mathbb{R}^n, \\ ii) & a(\cdot,\xi) \text{ è misurabile e } Y\text{-periodica in } \mathbb{R}^n, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \\ iii) & a(y,\xi) \text{ è della forma } a(y,\xi) = \alpha(y,\xi)A(y)\xi, \\ & \text{dove } \alpha(y,\xi) \in \mathbb{R}, A(y) \in M^{n\times n}(\mathbb{R}), y,\xi \in \mathbb{R}^n, \\ & \text{e inoltre } A = A^t, \alpha(y,\xi) \approx \langle A(y)\xi,\xi\rangle^{p/2-1}; \end{cases}$$

$$(S_2) \quad \lambda^{2/p}(y)|\xi|^2 \le \langle A(y)\xi,\xi\rangle \le \Lambda^{2/p}(y)|\xi|^2$$

dove i pesi λ *and* Λ *sono Y-periodici e soddisfano le condizioni I), II) e III) enunciate nel paragrafo precedente;*

$$(S_3) \quad \langle\alpha(y,\xi_1)A(y)\xi_1 - \alpha(y,\xi_2)A(y)\xi_2, \xi_1 - \xi_2\rangle > 0$$

per quasi ogni $y \in \mathbb{R}^n$ *e per ogni* ξ_1 *e* ξ_2 *in* $\mathbb{R}^n$ *con* $\xi_1 \neq \xi_2$.

Sia $\epsilon > 0, \Omega$ *un insieme aperto limitato di* $\mathbb{R}^n$ *e* $f \in L^\infty(\Omega)$. *Sia* u_ϵ *la soluzione debole del problema di Dirichlet* (P_ϵ)*:*

$$(P_\epsilon)\begin{cases} -div(\alpha(\frac{x}{\epsilon},\nabla u)A(\frac{x}{\epsilon})\nabla u) = f \ su\ \Omega \\ u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_{A_\epsilon}(\Omega) \end{cases}$$

e sia u_0 *la soluzione del problema di Dirichlet* (P_0) *(problema omogeneizzato):*

$$(P_0)\begin{cases} -div(b(\nabla u)) = f \ su\ \Omega \\ u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega) \end{cases}$$

dove b *rappresenta l'operatore omogeneizzato, che viene definito e descritto nella Osservazione (3) e nella Proposizione (1).*

Allora, per $\epsilon \to 0$, *abbiamo:*

$$\begin{aligned} u_\epsilon &\to u_0 && in\ \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega) - debole \\ \alpha(\tfrac{x}{\epsilon},\nabla u_\epsilon)A(\tfrac{x}{\epsilon})\nabla u_\epsilon &\to b(\nabla u_0) && in\ (L^1(\Omega))^n - debole. \end{aligned}$$

Osservazione 2 *L'esistenza di un'unica soluzione debole per ogni problema* $(P_\epsilon)_{\epsilon\geq 0}$ *è garantita dal seguente Teorema:*

Teorema 3 *Se* $f \in L^\infty(\Omega)$ *allora esiste un'unica* $u_\epsilon \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_{A_\epsilon}(\Omega)$ *tale che*

$$\int_\Omega \langle a(\frac{x}{\epsilon},\nabla u_\epsilon),\nabla\varphi\rangle dx = \int_\Omega f\varphi dx \qquad (8)$$

per ogni $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_{A_\epsilon}(\Omega)$.

La prova del Teorema 3 si basa sul segente Teorema ([15], III Corollario 1.8, pagina 87):

Teorema 4 *Sia* X *uno spazio di Banach,* $K \subseteq X$ *un sottoinsieme non vuoto, chiuso e convesso e sia* $A : K \to X^*$ *un operatore monotono, coercivo e continuo su un sottospazio finito dimensionale. Allora esiste* $u \in K$ *tale che*

$$\langle Au, v-u\rangle_{X^*,X} \geq 0 \ for\ any\ v \in K. \qquad (9)$$

Dim. del Teorema 3 Si consideri l'operatore $\mathcal{A} : \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_{A_\epsilon}(\Omega) \to (\overset{\circ}{W}{}^{1,p}_{A_\epsilon}(\Omega))^*$ definito da $\mathcal{A}(u) = \mathrm{div}\,(a(\cdot,\nabla u)) - f$. Si può facilmente verificare che $\mathcal{A}(u) \in (\overset{\circ}{W}{}^{1,p}_{A_\epsilon}(\Omega))^*$ usando il fatto che $\alpha(y,\xi) \approx \langle A(y)\xi,\xi\rangle^{p/2-1}$.

Inoltre $\mathcal{A}$ è monotono, coercivo e debolmente continuo, così che si può applicare il Teorema 4. □

Osservazione 3 *b rappresenta l'operatore omogeneizzato. Esso è definito, per* $\xi \in I\!R^n$, *come*

$$b(\xi) = \int_Y a(y, \nabla v(y))dy, \tag{10}$$

dove v *è la soluzione del cosidetto problema di cella* (P_C), *formulato sotto.*

Definito la spazio $W^{1,p}_{A,\#}(Y)$ come l'insieme delle funzioni reali $u \in W^{1,1}_{loc}(I\!R^n)$, u periodiche di periodo Y, $u \in W^{1,p}_A(Y)$, il problema di cella è formulato come segue:

$$(P_C)\begin{cases} \int_Y \langle a(y, \nabla v(y)), \nabla w(y)\rangle dy = 0 & \forall w \in W^{1,p}_{A,\#}(Y) \\ v \in \langle \xi, \cdot\rangle + W^{1,p}_{A,\#}(Y), & \int_Y v dy = 0 \end{cases}$$

L'esistenza della soluzione del problema di cella è assicurata del seguente Teorema:

Teorema 5 *Se* $\xi \in I\!R^n$, *allora esiste una unica funzione* $v \in \langle \xi, \cdot\rangle + W^{1,p}_{A,\#}(Y)$ *con* $\int_Y v dy = 0$ *tale che*

$$\int_Y \langle a(y, \nabla v(y)), \nabla w(y)\rangle dy = 0 \quad \forall w \in W^{1,p}_{A,\#}(Y) \tag{11}$$

Dim. L'esistenza della soluzione è una conseguenza del Teorema 4, con $X = W^{1,p}_A(Y), K = \{u = \langle \xi, \cdot\rangle + \tilde{u}, \tilde{u} \in W^{1,p}_{A,\#}(Y), \int_Y \tilde{u} dy = 0\}$ e $Au = div(a(\cdot, \nabla u))$. Infatti il Teorema 4 implica che

$$\int_Y \langle a(y, \nabla v(y)), \nabla \varphi(y) - \nabla v(y)\rangle dy \geq 0$$

per ogni $\varphi \in K$. Cosí se $w \in W^{1,p}_{A,\#}$ e $v = \langle \xi, \cdot\rangle + \tilde{v}$ con $\tilde{v} \in W^{1,p}_{A,\#}$ per ottenere (11) è sufficiente scegliere $\varphi = \pm w + \tilde{v} + \langle \xi, \cdot\rangle \mp \int_Y w dy$. L'unicità è dovuta alla stretta monotonia di a, si veda la proprietà (S_3). □

L'operatore omogeneizzato gode delle seguenti proprietà:

Proposizione 1 *Sia b definito da (10), allora*

i) $|b(\xi)| \leq c_1|\xi|^{p-1} \quad \forall \xi \in I\!R^n$;

ii) $\langle b(\xi), \xi\rangle \geq c_2|\xi|^p \quad \forall \xi \in I\!R^n$;

iii) $\langle b(\xi_1) - b(\xi_2), \xi_1 - \xi_2\rangle > 0 \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in I\!R^n, \xi_1 \neq \xi_2$;

iv) *b è continuo su $I\!R^n$.*

Dim. Si ripetono più o meno verbatim le dimostrazioni dei Lemmi 3.3, 3.4 e 3.5 in [8]. □

Il nostro risultato di "compattezza per compensazione" è il seguente:

Teorema 6 *Sia Ω un sottoinsieme aperto e limitato di $I\!R^n$, e sia ν un peso A_p in $I\!R^n$. Inoltre siano $\{\lambda_\epsilon\}$ e $\{\Lambda_\epsilon\}$ due famiglie di pesi definiti in $I\!R^n$ che soddisfano le seguenti condizioni:*

1. *esistono $q > p > 1$ e $C > 0$ tali che, se I, J sono cubi di raggio rispettivamente $r(I)$ e $r(J)$ e tali che $I \subseteq J$, allora*

$$\frac{r(I)}{r(J)}\left(\frac{\Lambda_\epsilon(I)}{\Lambda_\epsilon(J)}\right)^{1/q} \leq C\left(\frac{\lambda_\epsilon(I)}{\lambda_\epsilon(J)}\right)^{1/p}, \tag{12}$$

dove $C > 0$ è indipendente da $\epsilon \in (0,1)$.

2. *$\{\Lambda_\epsilon\}$ è uniformemente doubling e $\{\lambda_\epsilon\}$ è uniformemente A_p, cioè esistono $D, K > 0$ tali che*

$$\Lambda_\epsilon(2I) \leq D\Lambda_\epsilon(I), \quad \fint_I \lambda_\epsilon dx \left(\fint_I \lambda_\epsilon^{-1/(p-1)} dx\right)^{p-1} \leq K \tag{13}$$

per tutti i cubi I e per tutti gli $\epsilon \in (0,1)$.

Sia poi $\{u_\epsilon\}$ una famiglia di funzioni tali che

$$\begin{cases} u_\epsilon \in W^{1,p}_{A_\epsilon}(\Omega) & (a) \\ \|u_\epsilon\|^p_{W^{1,p}_{A_\epsilon}(\Omega)} \leq \alpha_1 \quad \textit{per ogni } \epsilon \in (0,1) & (b) \\ \textit{esiste } u \in W^{1,p}(\Omega, \nu) \ ; \ u_\epsilon \to u \textit{ in } L^1(\Omega). & (c) \end{cases}$$

Inoltre, sia $\{a_\epsilon\}$ una famiglia di funzioni a valori vettoriali tali che

$$\begin{cases} \langle a_\epsilon, \nabla u_\epsilon\rangle \in L^1(\Omega) \quad \textit{per ogni } \epsilon \in (0,1) & (d) \\ \int_\Omega |a_\epsilon|^{p'} \Lambda_\epsilon^{-1/(p-1)} dx \leq \alpha_2 \quad \textit{per ogni } \epsilon \in (0,1) & (e) \\ div(a_\epsilon) = f \in L^\infty \textit{ on } C^1_0(\Omega) \quad \textit{per ogni } \epsilon \in (0,1) & (f) \\ \textit{esiste } a \in (L^{p'}(\Omega, \nu^{-1/(p-1)}))^n \ ; \ a_\epsilon \to a \textit{ in } (L^1(\Omega))^n - \textit{debole}. & (g) \end{cases}$$

Allora

$$\langle a_\epsilon, \nabla u_\epsilon \rangle \to \langle a, \nabla u \rangle \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{14}$$

Osservazione 4 *Si noti che il limite* $\langle a, \nabla u \rangle \in L^1(\Omega)$*, per le ipotesi (c) e (g).*

Osservazione 5 *Le ipotesi 1) e 2) nel Teorema 6 sono più forti di quelle realmente necessarie. In effetti è sufficiente considerare 1) e 2) valide solo localmente, cioè assumere che per ogni insieme aperto* $\Omega' \subset\subset \Omega$ *1) e 2) siano valide per cubi* $I, J \subseteq \Omega'$*, con costanti che dipendono da* Ω'.

La prova del teorema si basa essenzialmente su una disuguaglianza di Sobolev-Poincaré con due pesi dovuta a Chanillo e Wheeden [4] e su un lemma di approssimazione.

La disuguaglianza, per la validità della quale sono essenziali le ipotesi 1) e 2) sui pesi del teorema 6, è la seguente:

Proposizione 2 *Se* B *è una palla Euclidea,* $B \subseteq \Omega$*, e* $u \in W^{1,p}(\Omega, \lambda_\epsilon)$*, allora per ogni* $s \in [p, q]$

$$\left(\frac{1}{\Lambda_\epsilon(B)} \int_B |u - u_B|^s \Lambda_\epsilon dx\right)^{1/s} \le C_s r(B) \left(\frac{1}{\lambda_\epsilon(B)} \int_B |\nabla u|^p \lambda_\epsilon dx\right)^{1/p}, \tag{15}$$

dove $u_B = \fint_B u(x)dx$ *è la media (di Lebesgue) di* u *su* B*, e la costante* $C_s > 0$ *è una costante geometrica che dipende solo da* n*,* s*, e dalle costanti delle ipotesi 1) e 2) del Teorema 6. In particolare,* C *è indipendente da* $\epsilon \in (0,1)$.

Inoltre, se $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega, \lambda_\epsilon)$*, allora*

$$\left(\frac{1}{\Lambda_\epsilon(B)} \int_B |u|^s \Lambda_\epsilon dx\right)^{1/s} \le C_s r(B) \left(\frac{1}{\lambda_\epsilon(B)} \int_B |\nabla u|^p \lambda_\epsilon dx\right)^{1/p}, \tag{16}$$

dove di nuovo C_s *è indipendente da* $\epsilon \in (0,1)$.

Dim. Per [4], (15) vale quando $u \in Lip_{loc}(\Omega)$. Se ora $u \in W^{1,p}(\Omega, \lambda_\epsilon)$ c'è una successione $u_k \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega, \lambda_\epsilon), u_k \to u$ in $W^{1,p}(\Omega, \lambda_\epsilon)$, per [6]. In particolare, $u_k \to u$ in $L^1_{loc}(\Omega)$ e q.o. in Ω, cosí che

$(u_k)_B \to u_B$ e possiamo concludere per il lemma di Fatou. La prova della seconda affermazione è analoga. □

Per la prova del lemma di approssimazione abbiamo bisogno dei due risultati seguenti:

Proposizione 3 *Se I è un qualunque cubo e $t \in (0,1)$, allora*

$$\Lambda_\epsilon(tI) \geq \frac{1}{D} t^{\log_2 D} \Lambda_\epsilon(I).$$

Inoltre, se poniamo $\tilde{D} = 1 + \frac{1}{D} 5^{-\log_2 D} > 1$ abbiamo

$$\Lambda_\epsilon(2I) \geq \tilde{D} \Lambda_\epsilon(I)$$

per ogni cubo I, e quindi

$$\Lambda_\epsilon(tI) \leq \tilde{D} t^{\log_2 \tilde{D}} \Lambda_\epsilon(I)$$

per $t \in (0,1)$ e $\epsilon \in (0,1)$.

Dim. la prima parte della proposizione è nota, mentre la seconda parte è contenuta in [21]. □

Proposizione 4 *Con le notazioni del Teorema 6, per ogni $\eta > 0$ esiste un $r(\eta, \Omega) > 0$ tale che, per ogni cubo $Q = Q(x, r), r < r(\eta, \Omega)$ si ha*

$$\left(\frac{\Lambda_\epsilon(Q)}{\lambda_\epsilon(Q)}\right)^{1/p} r < \eta \tag{17}$$

per ogni $\epsilon \in (0,1)$.

Dim. Si veda [12].

Possiamo ora enunciare il Lemma di approssimazione:

Lemma 2 *Siano λ_ϵ, Λ_ϵ, u e u_ϵ come nel Teorema 6. Allora per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$ e per ogni $\eta > 0$*

- *per ogni $\epsilon \in (0,1)$ esiste $u_{\epsilon,\eta} \in C^\infty(\Omega)$ tale che*

$$\int_{\Omega'} |u_\epsilon - u_{\epsilon,\eta}|^p \Lambda_\epsilon dx \leq \eta^p \int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^p \lambda_\epsilon dx; \tag{18}$$

- *esiste* $u_\eta \in C^\infty(\Omega)$ *tale che*

$$\int_{\Omega'} |u - u_\eta|^p \nu dx \leq \eta^p \int_\Omega |\nabla u|^p \nu dx. \tag{19}$$

Inoltre per ogni $\eta > 0$

$$u_{\epsilon,\eta} \to u_\eta \quad as \quad \epsilon \to 0^+ \tag{20}$$

in $L^\infty(\Omega')$.

Dim. Si veda [12].

Dimostrazione del Teorema 6 [compattezza per compensazione]. Dobbiamo dimostrare che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ abbiamo

$$\langle a_\epsilon, \nabla u_\epsilon \rangle(\varphi) \to \langle a, \nabla u \rangle(\varphi) \tag{21}$$

quando $\epsilon \to 0$.

Ricordiamo che

$$\langle a_\epsilon, \nabla u_\epsilon \rangle(\varphi) \equiv -\int_\Omega (diva_\epsilon) u_\epsilon \varphi dx - \int_\Omega \langle a_\epsilon, \nabla \varphi \rangle u_\epsilon dx. \tag{22}$$

Riguardo al primo integrale abbiamo (usando l'ipotesi (f) del teorema 6)) la seguente convergenza:

$$\int_\Omega (diva_\epsilon) u_\epsilon \varphi dx = \int_\Omega f u_\epsilon \varphi dx \to \int_\Omega f u \varphi dx \tag{23}$$

dato che $f\varphi \in L^\infty(\Omega)$ e $u_\epsilon \to u$ in $L'(\Omega)$.

Ci concentriamo quindi sul secondo integrale.

Sia $\Phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tale che $\Phi \equiv 1$ in un intorno $\mathcal{U}_\varphi$ di $\operatorname{supp}\varphi$, e poniamo $\overline{u}_\epsilon = u_\epsilon \Phi, \overline{u} = u\Phi$; $\overline{u}_\epsilon$ e $\overline{u}$ possono considerarsi prolungate da zero su tutto $I\!R^n$.

Sia $\eta > 0$ fissato, abbiamo:

$$|\int_\Omega \langle a_\epsilon, \nabla\varphi \rangle u_\epsilon dx - \int_\Omega \langle a, \nabla\varphi \rangle u dx| = |\int_\Omega \langle a_\epsilon, \nabla\varphi \rangle \overline{u}_\epsilon dx - \langle a, \nabla\varphi \rangle u dx|$$

$$\leq |\int_\Omega \langle a_\epsilon, \nabla\varphi \rangle \Lambda_\epsilon^{-1/p} (\overline{u}_\epsilon - \overline{u}_{\epsilon,\eta}) \Lambda_\epsilon^{1/p} dx| + |\int_\Omega \langle a_\epsilon, \nabla\varphi \rangle \overline{u}_{\epsilon,\eta} dx - \langle a, \nabla\varphi \rangle u dx|.$$

Per la disuguaglianza di Hölder, il lemma 2 e le ipotesi (e) e (b) del Teorema 6 abbiamo:

$$(\int_\Omega |a_\epsilon|^{p'} \Lambda_\epsilon^{-1/(p-1)} |\nabla\varphi|^{p'} dx)^{1/p'} \eta \|\nabla \overline{u}_\epsilon\|_{L^p(\Omega,\lambda_\epsilon)} \leq C_\varphi \alpha_1 \alpha_2 \eta, \tag{24}$$

per $\epsilon < \epsilon(\eta, \operatorname{supp}\Phi)$.

Abbiamo quindi:

$$|\int_\Omega \langle a_\epsilon, \nabla\varphi\rangle u_\epsilon dx \;-\; \int_\Omega \langle a, \nabla\varphi\rangle u dx| \leq C_\varphi \alpha_1 \alpha_2 \eta + \\ + \;|\int_\Omega \langle a_\epsilon, \nabla\varphi\rangle \overline{u}_{\epsilon,\eta} dx - \langle a, \nabla\varphi\rangle u dx|.$$

Ora, per il Lemma 2, dato che $\overline{u}_\epsilon \to \overline{u}$ in $L^1(\Omega)$, $\overline{u}_{\epsilon,\eta} \to \overline{u}_\eta$ su $L^\infty(supp\,\Phi)$ quando $\epsilon \to 0^+$. D'altra parte, supp $\langle a_\epsilon, \nabla\varphi\rangle \subseteq \mathcal{U}_\varphi$, dove $\Phi \equiv 1$, e quindi, se η è sufficientemente piccolo, $\overline{u}_\eta = u_\eta$ on supp φ, cosí che, ricordando che $a_\epsilon \to a$ debolmente in $(L^1(\Omega))^n$,

$$\int_\Omega \langle a_\epsilon, \nabla\varphi\rangle \overline{u}_{\epsilon,\eta} dx \stackrel{\epsilon\to 0^+}{\to} \int_\Omega \langle a, \nabla\varphi\rangle \overline{u}_\eta dx \equiv \int_\Omega \langle a, \nabla\varphi\rangle u_\eta dx. \tag{25}$$

Per cui

$$\limsup_{\epsilon\to 0^+} |\int_\Omega \langle a_\epsilon, \nabla\varphi\rangle u_\epsilon dx \;-\; \int_\Omega \langle a, \nabla\varphi\rangle u dx| \\ \leq \; C\eta + |\int_\Omega \langle a, \nabla\varphi\rangle u_\eta dx - \langle a, \nabla\varphi\rangle u dx| \leq C\eta,$$

dato che

$$|\int_\Omega \langle a, \nabla\varphi\rangle (u_\eta - u) dx| \leq C_\varphi \left(\int_\Omega |a|^{p'} \nu^{-1/(p-1)} dx\right)^{1/p'} \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \nu dx\right)^{1/p} \eta. \tag{26}$$

Per cui

$$\int_\Omega \langle a_\epsilon, \nabla\varphi\rangle u_\epsilon dx \to \int_\Omega \langle a, \nabla\varphi\rangle u dx. \tag{27}$$

Sfruttando (23) e (27) abbiamo finalmente

$$\langle a_\epsilon, \nabla u_\epsilon\rangle \to \langle a, \nabla u\rangle \tag{28}$$

in $\mathcal{D}'(\Omega)$, come richiesto. □

La dimostrazione del Teorema 2 è basata sul Teorema 6 e sul seguente Lemma:

Lemma 3 *1) Le funzioni u_ϵ definite nel Teorema 2, Problema (P_ϵ) soddisfano le ipotesi (a),(b),(c) del teorema 6 con $\nu \equiv 1$ e $u = u_0^*$ opportuno;*

2) In maniera analoga, le funzioni v_ϵ definite da $v_\epsilon = v(\frac{x}{\epsilon})$, dove v è definito nel Teorema 5 come la soluzione del Problema (11), soddisfano (a),(b) e (c) del Teorema 6 con $\nu \equiv 1$ e $u = \langle \xi, \cdot \rangle$;

3) Le funzioni a_ϵ definite da $a_\epsilon(x) = a(\frac{x}{\epsilon}, \nabla u_\epsilon)$, dove u_ϵ è definita nel Teorema 2, Problema (P_ϵ), soddisfano (e),(f),(g) del Teorema 6 con $\nu \equiv 1, f = f$ e $a = a_0$ opportuni;

4) Le funzioni a_ϵ definite da $a_\epsilon(x) = a(\frac{x}{\epsilon}, \nabla v_\epsilon)$, dove v_ϵ è definito in 2) sopra, soddisfano (e),(f),(g) del Teorema 6 con $\nu \equiv 1, f \equiv 0$ e $a(x) = b(\xi)$;

5) Se a_ϵ è definito da una delle scelte 3) o 4) e indipendentemente u_ϵ da 1) o 2), allora $\langle a_\epsilon, \nabla u_\epsilon \rangle \in L^1(\Omega)$ for per ogni $\epsilon \in (0,1)$ ((d) del Teorema 6).

Per la prova del Lemma 3 (e anche del Teorema 2) abbiamo bisogno dei due risultati seguenti:

Teorema 7 *Sia $p > 1$ e $K \geq 1$. Allora esistono due costanti positive $\delta = \delta(n,p,K)$ e $C = C(n,p,K)$ tali che*

$$\Big(\fint_Q \lambda^{1+\delta} dx \Big)^{1/(1+\delta)} \leq C \fint_Q \lambda dx,$$
$$\Big(\fint_Q \lambda^{-(1+\delta)/(p-1)} dx \Big)^{1/(1+\delta)} \leq C \fint_Q \lambda^{-1/(p-1)} dx$$

per ogni cubo Q con facce parallele ai piani coordinati e per ogni $\lambda \in A_p$, con A_p-costante K.

Dim. Si veda [3], [7] e [13]

Lemma 4 *Sia $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n), 1 \leq p \leq +\infty$ una funzione Y-periodica e sia $f_\epsilon(x) = f(\frac{x}{\epsilon})$ quasi ovunque in $\mathbb{R}^n$.*
Allora, se $p < +\infty$, per $\epsilon \to 0$ si ha

$$f_\epsilon \rightharpoonup \int_Y f dy \qquad \text{debolmente in } L^p_{loc}(\mathbb{R}^n), \tag{29}$$

se $p = +\infty$, per $\epsilon \to 0$ si ha

$$f_\epsilon \rightharpoonup \int_Y f dy \qquad \text{debolmente-* in } L^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{30}$$

Dim. Si veda [2] pagina 33.

Cenno alla dim. del Lemma 3 La dimostrazione del Lemma è un poco laboriosa, anche se non difficile (si veda [12]), e sfrutta praticamente tutto quanto si è dimostrato fino ad ora. In particolare vengono usati il Teorema 7, il Lemma 4 e l'ipotesi di monotonia sull'operatore.

In particolare due stime cruciali che si dimostrano per avere il Lemma, e che verranno utilizzate anche in seguito, sono le seguenti:

$$\int_\Omega (|u_\epsilon|^p + |\nabla u_\epsilon|^p)\lambda_\epsilon dx \leq C_1 \quad \forall \epsilon > 0 \tag{31}$$

$$\int_\Omega |\alpha(\frac{x}{\epsilon}, \nabla u_\epsilon)A(\frac{x}{\epsilon})\nabla u_\epsilon|^{p'} \Lambda_\epsilon^{-1/(p-1)} dx \leq C_2 \quad \forall \epsilon > 0 \tag{32}$$

dove C_1 e C_2 sono due costanti positive indipendenti da ϵ. □

Dimostrazione del Teorema 2. Per avere il Teorema abbiamo solo bisogno, usando le notazioni del Lemma 3, di dimostrare che

$$u_0^* \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega), \qquad a_0(x) = b(\nabla u_0^*(x)) \quad \text{a.e. in } \Omega. \tag{33}$$

Infatti, supponiamo che (33) valga; allora un argomento di limite mostra che u_0^* è una soluzione variazionale di (P_0), e allora, per unicità (Osservazione 2), segue che

$$u = u_0^* \quad \text{a.e. in } \Omega.$$

Dimostriamo ora che vale (33). Per provare che $u_0^* \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$ è sufficiente mostrare che

$$\nabla u_0^* \in (L^p(\Omega))^n \tag{34}$$

dato che Ω è un insieme aperto regolare.

Per ogni $\varphi \in C_0^0(\Omega)$, usando la disuguaglianza di Hölder, per $j = 1, \dots, n$ abbiamo:

$$\begin{aligned} |\int_\Omega \partial_j u_\epsilon \varphi dx| &\leq \int_\Omega |\partial_j u_\epsilon| \lambda_\epsilon^{1/p} \lambda_\epsilon^{-1/p} |\varphi| dx \\ &\leq (\int_\Omega |\partial_j u_\epsilon|^p \lambda_\epsilon dx)^{1/p} (\int_\Omega \lambda_\epsilon^{-1/(p-1)} |\varphi|^{p'} dx)^{1/p'} \\ &\leq C_1^{1/p} (\int_\Omega \lambda_\epsilon^{-1/(p-1)} |\varphi|^{p'} dx)^{1/p'} \end{aligned} \tag{35}$$

dove nell'ultima disuguaglianza abbiamo usato (31).

Dato che per il Lemma 4 abbiamo

$$\int_\Omega \lambda_\epsilon^{-1/(p-1)} |\varphi|^{p'} dx \to \int_Y \lambda^{-1/(p-1)} dy \int_\Omega |\varphi|^{p'} dx, \tag{36}$$

detto $C_3 = C_1^{1/p} (\int_\Omega \lambda^{-1/(p-1)} dy)^{1/p'}$ e preso il limite debole in (36) otteniamo:

$$|\int_\Omega \partial_j u_0^* \varphi dx| \leq C_3 \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} \quad \forall \varphi \in C_0^0(\Omega), \tag{37}$$

che implica (34).

Dimostraimo ora che $a_0(x) = b(\nabla u_0^*(x))$ a.e. in Ω.

Usando la disuguaglianza (32) abbiamo, per ogni $\varphi \in (C_0^0(\Omega))^n$:

$$|\int_\Omega \alpha(\frac{x}{\epsilon}, \nabla u_\epsilon) \langle A(\frac{x}{\epsilon}) \nabla u_\epsilon, \varphi \rangle dx| \leq \int_\Omega |\alpha(\frac{x}{\epsilon}, \nabla u_\epsilon) A(\frac{x}{\epsilon}) \nabla u_\epsilon| \Lambda_\epsilon^{-1/p} \Lambda_\epsilon^{1/p} |\varphi| dx$$

$$\leq (\int_\Omega |\alpha(\frac{x}{\epsilon}, \nabla u_\epsilon) A(\frac{x}{\epsilon}) \nabla u_\epsilon|^{p'} \Lambda_\epsilon^{-1/(p-1)} dx)^{1/p'} (\int_\Omega \Lambda_\epsilon |\varphi|^p dx)^{1/p} \tag{38}$$

$$\leq (\int_\Omega \Lambda_\epsilon |\varphi|^p dx)^{1/p}, \tag{39}$$

e procedendo come in (36) e (37) otteniamo che

$$a_0 \in (L^{p'}(\Omega))^n. \tag{40}$$

Sia $\xi \in I\!R^n$, e sia v la soluzione del problema (11) e sia $v_\epsilon = \epsilon v(x/\epsilon)$. Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, con $\varphi \geq 0$ in Ω, per la monotonia di $a(y, \xi) = \alpha(y, \xi) A(y) \xi$ (proprietà (S_3)) segue che

$$0 \leq \int_\Omega \langle a(x/\epsilon, \nabla u_\epsilon) - a(x/\epsilon, \nabla v_\epsilon), \nabla u_\epsilon - \nabla v_\epsilon \rangle \varphi dx. \tag{41}$$

Ora grazie al teorema di compattezza per compensazione e al Lemma 3 possiamo passare al limite nella disuguaglianza (41) a finalmente otteniamo:

$$0 \leq \int_\Omega \langle a_0(x) - b(\xi), \nabla u_0^*(x) - \xi \rangle \varphi dx, \forall \xi \in I\!R^n, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \varphi \geq 0. \tag{42}$$

Dall'ultima disuguaglianza deduciamo che esiste un sottoinsieme N di Ω, di misura nulla, tale che

$$\langle a_0(x) - b(\xi), \nabla u_0^*(x) - \xi \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \Omega \backslash N, \forall \xi \in Q^n. \tag{43}$$

Allora per la continuità di b (Proposizione 1, iv) abbiamo che

$$\langle a_0(x) - b(\xi), \nabla u_0^*(x) - \xi \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \Omega \backslash N, \forall \xi \in I\!R^n. \tag{44}$$

Ora, per quasi ogni $x \in \Omega, \eta \in I\!R^n$ e $t > 0$ poniamo $\xi = \nabla u_0^*(x) - t\eta$. Scrivendo (44) con questo ξ e facendo tendere $t \to 0$ otteniamo (usando ancora la continuità di b)

$$\langle a_0(x) - b(\nabla u_0^*(x)), \eta \rangle \geq 0, \text{ for a.e. } x \in \Omega \backslash N, \forall \eta \in I\!R^n \tag{45}$$

dalla quale segue (33). □

References

[1] A. Bensoussan, J.L. Lions and G. Papanicolaou, *"Asymptotic Analysis for Periodic Structures"*, North-Holland, Amsterdam (1978).

[2] D. Cioranescu and P. Donato, *"An Introduction to Homogenization"*, Clarendon Press, Oxford (1999).

[3] R.R. Coifman and C. Fefferman, *Weighted Norm Inequalities for Maximal Function and Singular Integrals*, Studia Math. 51 (1974), 241–250.

[4] S. Chanillo and R.L. Wheeden, *Weighted Poincaré and Sobolev inequalities and estimates for weighted Peano maximal functions*, Amer. J. Math. 107 (1985), 1191–1226.

[5] S. Chanillo and R.L. Wheeden, *L^p estimates for fractionals integrals and Sobolev inequalities with applications to Schrödinger operators*, Comm. Partial Differential Equations 10 (1985), 1077–1116.

[6] V. Chiadò Piat and F. Serra Cassano, *Relaxation of degenerate variational integrals*, Nonlinear Anal. 22 (1994), 409–424.

[7] R. De Arcangelis, *Compactness and Convergence of Minimum Points for a Class of non Linear non Equicoercive Functionals*, Nonlinear Anal. 15 (1990), 363–380.

[8] R. De Arcangelis and F. Serra Cassano, *On the homogenization of degenerate elliptic equations in divergence form*, J. Math. Pures Appl 71 (1992), 119–138.

[9] E.B. Fabes, C.E. Kenig and R. Serapioni, *The local regularity o solutions of degenerate elliptic equations*, Comm. Partial Differential Equations 7 (1982), 77–116.

[10] B. Franchi, G. Lu and R.L. Wheeden, *Representation formulas and weighted Poincaré inequalities for Hörmander vector fields*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 45 (1995), 577–604.

[11] B. Franchi, R. Serapioni and F. Serra Cassano, *Approximation and Imbedding Theorems for Weighted Sobolev Spaces Associated with Lipschitz Continuous Vector Fields*, Boll. Un. Mat. Ital. (7) 11–B (1997), 83–117.

[12] B. Franchi and M.C. Tesi, *"Homogenization for strongly anisotropic nonlinear elliptic equations*, Sottomesso per la pubblicazione.

[13] J. Garcia Cuerva and J.L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, North-Holland Math. Studies, no. 116, North-Holland (1985).

[14] V.V. Jikov, S.M.Kozlov and O.A. Oleinik, *Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals*, Springer-Verlag (1991).

[15] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia, *"An Introduction to Variational Inequalities and their Applications"*, Academic Press (1980).

[16] P. Koskela and P. MacManus, *Quasiconformal mappings and Sobolev spaces*, Studia Math. 131, (1998), 1–17.

[17] F. Murat, *Compacité par compensation*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 5, (1978), 489–507.

[18] E. Sanchez-Palencia, *Nonhomogeneous Media and Vibration Theory*, Lecture Notes in Physics 127, Springer-Verlag, New York (1980).

[19] S. Semmes, *Finding curves on general spaces through quantitative topology with applications to Sobolev and Poincaré inequalities*, Selecta Math. (N.S.) 2, (1996), 155–295.

[20] L. Tartar, *Compensated Compactness and Applications to Partial Differential Equations*, Nonlinear Analysis and Mechanics, Heriott-Watt Symposium, Pitman, London (1979).

[21] R.L. Wheeden, *A characterization of some weighted norm inequalities for the fractional maximal function*, Studia Math. 107, No 3, (1993), 257–272.